

Физика Волновых Процессов

Задача 4.4

Валиахметов Булат, гр. 303

Постановка задачи

Определить спектр прямоугольного импульса $y(t) = \begin{cases} a, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$.

Из энергетических соотношений оценить ширину спектра $\Delta\omega_W$ для импульсов длительностью $\tau = 1\text{мс}$ и $\tau = 1\text{мкс}$. Для этого определить частотный интервал, которому соответствует ε - некоторая наперед заданная близкая к единице часть полной энергии сигнала (значение ε выбирается самостоятельно). Ширину этого интервала считать шириной спектра. Представить ширину спектра $\Delta\omega_W$ и Δf_W в размерных единицах для обеих длительностей импульса.

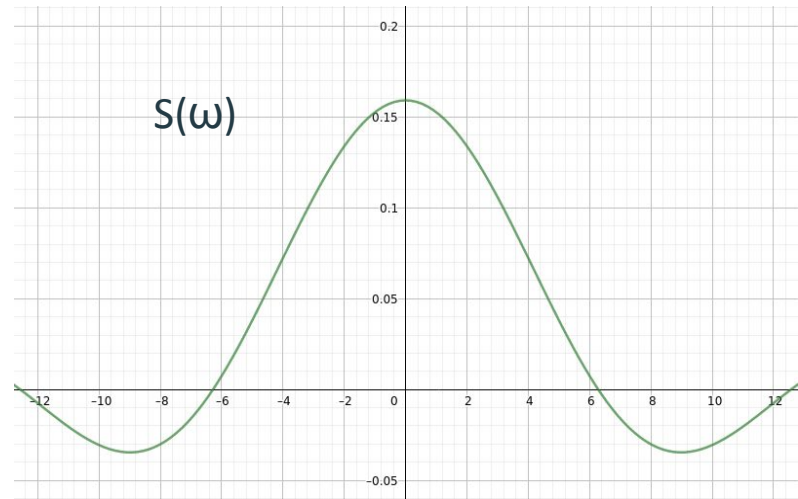
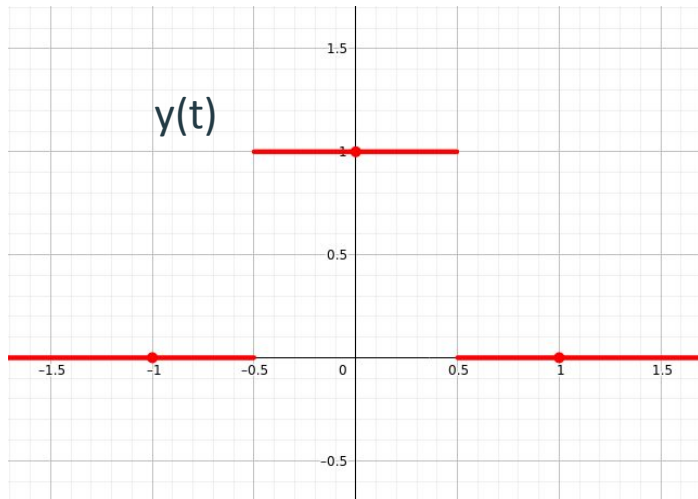
Поиск спектра

Сигнал представляет собой непериодическую функцию => спектр непрерывен.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{2\pi(-i\omega)} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t})$$

$$S(\omega) = \frac{a\tau}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Сигнал и его спектр



Оценка ширины спектра

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} a^2 dt = a^2 \tau$$

$$G(\omega) = 2\pi |S(\omega)|^2 = \frac{a^2 \tau^2}{2\pi} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right), \Delta\omega_W : \int_{-\Delta\omega_W}^{+\Delta\omega_W} G(\omega) d\omega = \varepsilon W$$

$$\varepsilon a^2 \tau = \frac{a^2 \tau^2}{2\pi} \int_{-\Delta\omega_W}^{+\Delta\omega_W} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) d\omega \Rightarrow \varepsilon \pi = \int_{-\Delta\omega_W}^{+\Delta\omega_W} \operatorname{sinc}^2(x) dx$$

Вспомогательные вычисления

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sinc}^2(x) dx = -2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} + 2 \int_0^{\alpha} \frac{\sin(2x)}{2x} d(2x) = 2Si(2\alpha) + \frac{\cos(2\alpha) - 1}{\alpha}$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Значения функции $Si(x)$ будем получать численно с помощью сервиса [wolframalpha.com](https://www.wolframalpha.com)

Результаты

$$\varepsilon\pi = 2\left(\text{Si}(\alpha) + \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha}\right), \alpha = \tau\Delta\omega_W, \Delta\omega_W = \frac{\alpha}{\tau}$$

ε	α
0.8	3.36
0.85	3.91
0.9	5.33
0.91	7.91
0.95	13.02

Выберем $\alpha = 5 \Rightarrow \Delta\omega_W = \frac{5}{\tau}, \Delta f_W = \frac{5}{2\pi\tau}$

	$\tau = 1\text{нс}$	$\tau = 1\text{мкс}$
$\Delta\omega_W$	5 кГц*рад	5 МГц*рад
Δf_W	0.8 кГц	0.8 МГц